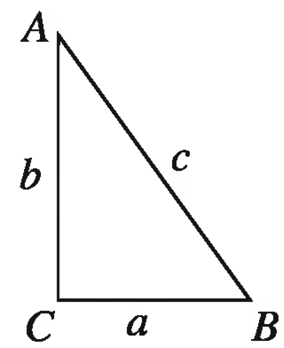
নবম অধ্যায়
পিথাগোরাসের উপপাদ্য

খ্রিস্টপূর্ব ষষ্ঠ শতাব্দীর গ্রিক দার্শনিক পিথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য নিরূপণ করেন। সমকোণী ত্রিভুজের এ বৈশিষ্ট্য পিথাগোরাসের বৈশিষ্ট্য বলে পরিচিত। বলা হয় পিথাগোরাসের জন্মের আগে মিসরীয় ও ব্যাবিলনীয় যুগেও সমকোণী ত্রিভুজের এ বৈশিষ্ট্যের ব্যবহার ছিল। এ অধ্যায়ে আমরা সমকোণী ত্রিভুজের এ বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করব। সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো বিশেষ নামে পরিচিত। সমকোণের বিপরীত বাহু অতিভুজ এবং সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে ভূমি ও উন্নতি। বর্তমান অধ্যায়ে এ তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের মধ্যে যে সম্পর্ক রয়েছে সে বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- পিথাগোরাসের উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে ত্রিভুজটি সমকোণী কি না যাচাই করতে পারবে।
- পিথাগোরাসের সূত্র ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

৯.১ সমকোণী ত্রিভুজ



চিত্রে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, এর $\angle ACB$ কোণটি সমকোণ। সুতরাং AB ত্রিভুজটির অতিভুজ। চিত্রে ত্রিভুজটির বাহুগুলো a, b, c দ্বারা নির্দেশ করি।

কাজ:
১। একটি সমকোণ আঁক এবং এর বাহু দুইটির উপর যথাক্রমে 3 সে.মি. ও 4 সে.মি. দূরত্বে দুইটি বিন্দু চিহ্নিত কর। বিন্দু দুইটি যোগ করে একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক। ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য পরিমাপ কর। দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. হয়েছে কি ?

লক্ষ কর, $3^2 + 4^2 = 5^2$ অর্থাৎ দুই বাহুর দৈর্ঘ্য পরিমাপের বর্গের যোগফল অতিভুজের পরিমাপের বর্গের সমান।

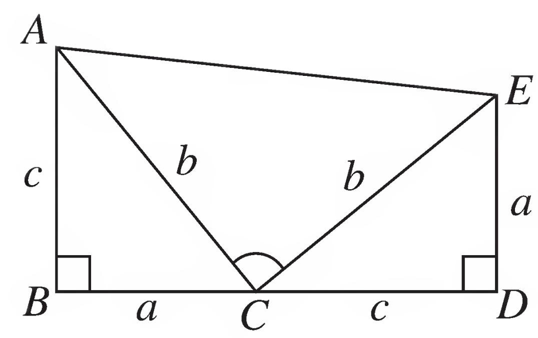
সুতরাং a, b, c বাহু দ্বারা নির্দেশিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $c^2 = a^2 + b^2$ হবে। এটা পিথাগোরাসের উপপাদ্যের মূল প্রতিপাদ্য। এই উপপাদ্যটি বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা হয়েছে। এখানে কয়েকটি সহজ প্রমাণ দেওয়া হলো।

৯.২ পিথাগোরাসের উপপাদ্য

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

(দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে)

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90°$ অতিভুজ $AC = b, AB = c$ ও $BC = a$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, অর্থাৎ $b^2 = c^2 + a^2$



অঙ্কন : BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $CD = AB = c$ হয়। D বিন্দুতে বর্ধিত BC এর উপর DE লম্ব আঁকি, যেন $DE = BC = a$ হয়। C, E ও A, E যোগ করি।

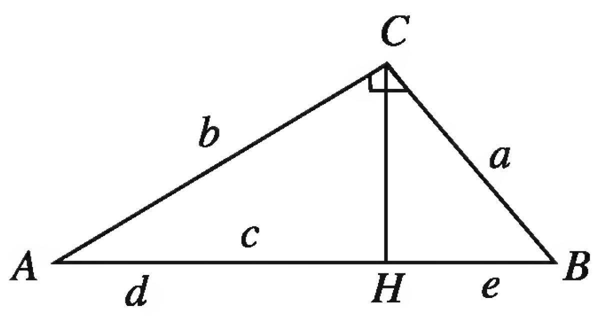
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC ও ΔCDE এ $AB = CD = c, BC = DE = a$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CDE$	[প্রত্যেকে সমকোণ]।
সুতরাং, $\Delta ABC \cong \Delta CDE$. $\therefore AC = CE = b$ এবং $\angle BAC = \angle ECD$.	[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
(২) আবার, $AB \perp BD$ এবং $ED \perp BD$ বলে $AB \parallel ED$. সুতরাং, $ABDE$ একটি ট্রাপিজিয়াম।	
(৩) তদুপরি, $\angle ACB + \angle BAC = \angle ACB + \angle ECD =$ এক সমকোণ।	$\therefore \angle BAC = \angle ECD$
$\therefore \angle ACE =$ এক সমকোণ। $\therefore \Delta ACE$ সমকোণী ত্রিভুজ। এখন $ABDE$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (\Delta$ ক্ষেত্র $ABC + \Delta$ ক্ষেত্র $CDE + \Delta$ ক্ষেত্র $ACE)$	
বা, $\frac{1}{2}BD(AB + DE) = \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}b^2$ বা, $\frac{1}{2}(BC + CD)(AB + DE) = \frac{1}{2}[2ac + b^2]$ বা, $(a+c)(a+c) = 2ac + b^2$ [2 দ্বারা গুণ করে] বা, $a^2 + 2ac + c^2 = 2ac + b^2$ বা, $b^2 = c^2 + a^2$ (প্রমাণিত)	[ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের যোগফল $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব]

২০১৮

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ

(সদৃশকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে)



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C = 90°$ এবং অতিভুজ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, অর্থাৎ $c^2 = a^2 + b^2$.

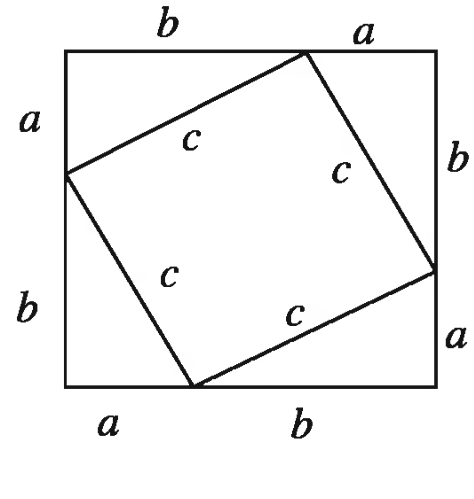
অঙ্কন : C বিন্দু থেকে অতিভুজ AB এর উপর লম্ব CH অঙ্কন করি । AB অতিভুজ H বিন্দুতে d ও e অংশে বিভক্ত হলো ।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
ΔBCH ও ΔABC এ $\angle BHC = \angle ACB$ এবং $\angle CBH = \angle ABC$	প্রত্যেকেই সমকোণ সাধারণ কোণ
(১) $\therefore \Delta CBH$ ও ΔABC সদৃশ । $\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC}$ $\therefore \frac{a}{c} = \frac{e}{a}$ …… (1)	
(২) অনুরূপভাবে ΔACH ও ΔABC সদৃশ । $\therefore \frac{b}{c} = \frac{d}{b}$ …… (2)	[(i) উভয় ত্রিভুজ সমকোণী (ii) $\angle A$ কোণ সাধারণ]
(৩) অনুপাত দুইটি থেকে পাই, $a^2 = c \times e$, $b^2 = c \times d$ অতএব, $a^2 + b^2 = c \times e + c \times d$ $= c(e+d) = c \times c = c^2$ $\therefore c^2 = a^2 + b^2$ [প্রমাণিত]	$\because$ $c = e+d$

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ

(বীজগণিতের সাহায্যে)



পিথাগোরাসের উপপাদ্য বীজগণিতের সাহায্যে সহজেই প্রমাণ করা যায় ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ c এবং a, b যথাক্রমে অন্য দুই বাহু ।

প্রমাণ করতে হবে, $c^2 = a^2 + b^2$.

অঙ্কন : প্রদত্ত ত্রিভুজটির সমান করে চারটি ত্রিভুজ চিত্রে প্রদর্শিত উপায়ে আঁকি ।

২০১৮

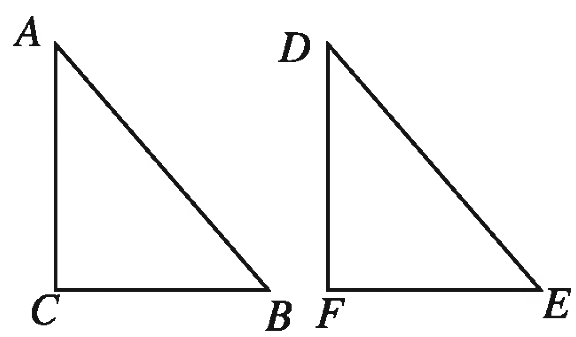
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) অঙ্কিত বড় ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র । এর ক্ষেত্রফল $(a+b)^2$	[বাহুগুলোর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $a+b$ এবং কোণগুলো সমকোণ]
(২) ছোট চতুর্ভুজ ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র । এর ক্ষেত্রফল c^2	[বাহুগুলোর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য c]
(৩) অঙ্কনানুসারে, বড় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল চারটি ত্রিভুজক্ষেত্র ও ছোট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান । অর্থাৎ, $(a+b)^2 = 4\times\frac{1}{2}\times a\times b+c^2$ বা, $a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$ বা, $c^2=a^2+b^2$ (প্রমাণিত)	

কাজ : ১ । $(a-b)^2$ এর বিস্তৃতির সাহায্যে পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি প্রমাণ কর ।

৯.৩ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

যদি কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর $AB^2 = AC^2 + BC^2$ প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle C =$ এক সমকোণ ।

অঙ্কন : এমন একটি ত্রিভুজ DEF আঁকি, যেন $\angle F$ এক সমকোণ, $EF = BC$ এবং $DF = AC$ হয় ।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $DE^2 = EF^2 + DF^2$ $= BC^2 + AC^2 = AB^2$	[কারণ ΔDEF এ $\angle F$ এক সমকোণ]
$\therefore DE = AB$	[কল্পনা]
এখন ΔABC ও ΔDEF এ $BC = EF$, $AC = DF$ এবং $AB = DE$.	
$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF \quad \therefore\ \angle C = \angle F$	[বাহু-বাহু-বাহু সর্বসমতা]
কিন্তু $\angle F =$ এক সমকোণ হওয়ায় $\angle C =$ এক সমকোণ । [প্রমাণিত]	

২০১৮

অনুশীলনী ৯

১। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC-এর উপর লম্ব।
প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4AD^2$

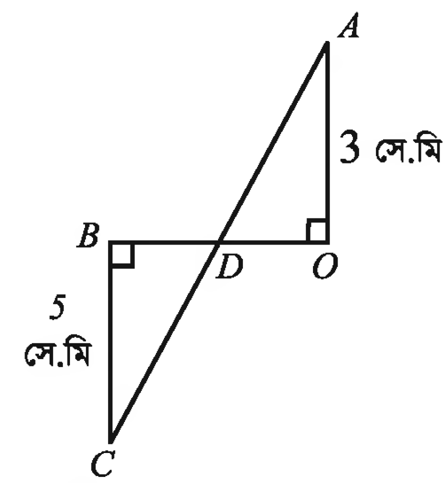
২। ABC চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

৩। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ এবং CD একটি মধ্যমা।
প্রমাণ কর যে, $BC^2 = CD^2 + 3AD^2$

৪। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ BP ও CQ দুইটি মধ্যমা।
প্রমাণ কর যে, $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

৫। প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঐ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

৬।



চিত্রে OB = 4 সে.মি হলে BD এবং AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৭। প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র এর কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

৮। ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু।
প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

৯। ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু হলে,
প্রমাণ কর যে, $DE^2 = CE^2 + BD^2$.

১০। ΔABC এ BC এর উপর লম্ব AD এবং $AB > AC$.
প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

১১। ΔABC এ BC এর উপর AD লম্ব এবং AD এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও $AB > AC$.
প্রমাণ কর যে, $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$.

১২। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত $1 : 1 : \sqrt{2}$ হলে এর বৃহত্তম কোনটির মান কত?

ক) 80° খ) 90° গ) 100° ঘ) 120°

১৩। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের পার্থক্য 5° হলে ক্ষুদ্রতম কোনটির মান কত?

ক) 40° খ) 42.5° গ) 47.5° ঘ) 50°

১৪। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ x একক এবং অপর বাহুদ্বয়ের একটি y একক হলে ৩য় বাহুটির দৈর্ঘ্য কত একক?

ক) $x^2 + y^2$ খ) $\sqrt{x^2 + y^2}$ গ) $\sqrt{x^2 - y^2}$ ঘ) $x^2 - y^2$

১৫। পরিমাপটির কোন পরিমাপের জন্য একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব?

ক) 4, 4, 5 খ) 5, 12, 13 গ) 8, 10, 12 ঘ) 2, 3, 4

১৬। ΔABC এ $\angle A =$ ১ সমকোণ হলে এর

i. অতিভুজ BC

ii. ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB.AC$

iii. $BC^2 = AB^2 + AC^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১৭। সমকোণী ত্রিভুজের–

i. বৃহত্তম বাহুটি অতিভুজ

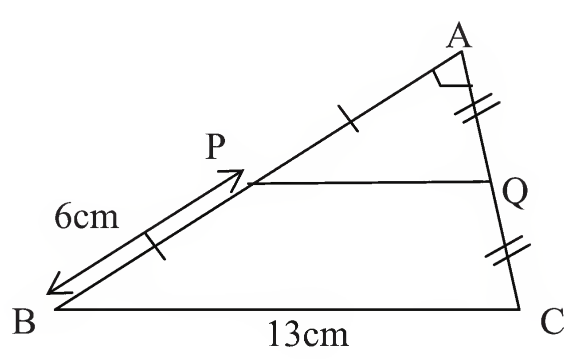
ii. ক্ষুদ্রতর বাহুদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি বৃহত্তম বাহুর বর্গের সমান।

iii. সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পরের পূরক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

♦ **নিচের চিত্রের আলোকে ১৮, ১৯ ও ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**



চিত্রে $\angle A = 90^0$

১৮। PQ এর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 6 খ) 6.5 গ) 7 ঘ) 9.5

২০১৮

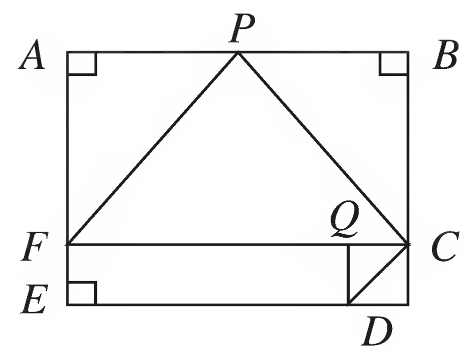
১৯। $\Delta ABC =$ কত বর্গ সে.মি.?

ক) 39 খ) 32.5 গ) 30 ঘ)15

২০। ΔAPQ এর পরিসীমা কত সে.মি.?

ক) 15 খ) 12.5 গ) 10 ঘ)7.5

২১। $ABCDE$ বহুভুজে $AE \parallel BC$, $CF \perp AE$ এবং
$DQ \perp CF$. $ED = 10$ মি.মি. , $EF = 2$ মি.মি.
$BC = 8$ মি.মি. $AB = 12$ মি.মি.



উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের (১-৪) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

(১) $ABCF$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ মি.মি. ?

ক. 64 খ. 96 গ. 100 ঘ. 144

(২) নিচের কোনটি FPC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে ?

ক. 32 বর্গ মি.মি. খ. 48 বর্গ মি.মি. গ. 72 বর্গ মি.মি. ঘ. 60 বর্গ মি.মি.

(৩) CD -এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটিতে প্রকাশ পায়?

ক. $2\sqrt{2}$ মি.মি. খ. 4 মি.মি. গ. $4\sqrt{2}$ মি.মি. ঘ. 8 মি.মি.

(৪) নিচের কোনটিতে ΔFPC ও ΔDQC এর ক্ষেত্রফলের অন্তর নির্দেশ করে ?

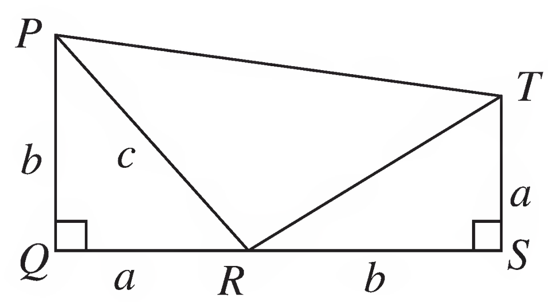
ক. 46 বর্গ মি.মি. খ. 48 বর্গ মি.মি. গ. 50 বর্গ মি.মি. ঘ. 52 বর্গ মি.মি.

২২।

ক. $PQST$ কী ধরনের চতুর্ভুজ ? স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

খ. দেখাও যে, ΔPRT সমকোণী।

গ. প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$



২৩.ΔPQR এ $\angle P = 90^0$,PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

ক) ত্রিভুজটি আঁক।

খ) চিত্র থেকে প্রমাণ কর যে, $PR^2 + PQ^2 = QR^2$।

গ) প্রমাণ কর $5RQ^2 = 4(RN^2 + QM^2)$

২০১৮